A) Rappels théoriques

I) Oscillations libres :

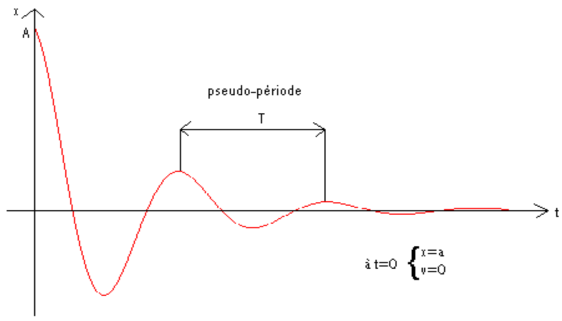
1- Equation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec :

x : élongation linéaire (ou angulaire dans le cas de ce TP), $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre, Q : facteur de qualité.

2- Equation horaire du mouvement de la masse :

*$Q > \frac{1}{2}$ <u>mouvement pseudopériodique</u> : $x = A\,e^{\frac{-t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)$

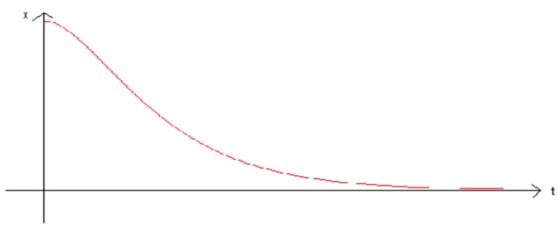
avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$: pseudo-pulsation.



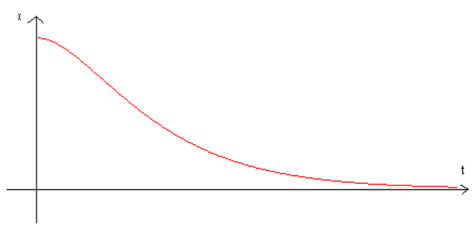
Décrément logarithmique : par définition $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right)$ où n est le nombre de période T.

On démontre que : $\delta = \frac{\pi}{Q\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et pour Q suffisamment grand : $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$.

* $Q = \frac{1}{2}$ <u>mouvement critique</u> : $x = (At + B)\,e^{\frac{-t}{\tau}}$

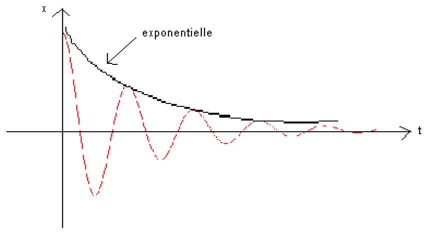


* $Q < \frac{1}{2}$ <u>mouvement apériodique</u> $x = A\,e^{\frac{-t}{\tau}}ch\left(\sqrt{\Delta'}t + \varphi\right)$ avec $\Delta' = \omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$



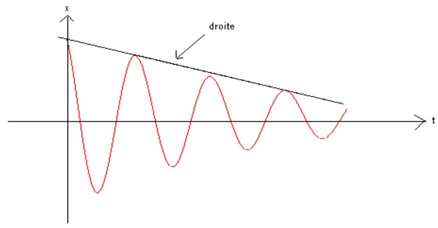
3- Types d'amortissements

- Fluide ou visqueux : $\vec{f} = -h\vec{v}$, alors l'amplitude décroît exponentiellement.(cas théorique ci-desus)



- Solide : $\|\vec{f}\| = cste = f$; vecteur force opposé à $\vec{v}$, alors l'amplitude décroît linéairement.

Du fait que la force de frottement n'a pas toujours le même sens, elle peut s'écrire : $\vec{f} = -\varepsilon f \overrightarrow{u_x}$, où le coefficient ε est tel que $\varepsilon = +1$ si $\dfrac{dx}{dt} > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $\dfrac{dx}{dt} < 0$. En déduire l'équation différentielle en x(t) du mouvement de M (paramètres : m, k, f et ε . Ne pas la résoudre)



II) Oscillations forcées : cas d'une excitation sinusoïdale

1- Equation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)$.

Pour trouver cette équation :

- Soit on dit que le point M est soumis à un déplacement x_{exc} = Acos (ωt).
- Ou que la masse m est soumise à une force excitatrice F = F_0cos (ωt).
- En rapprochant les deux expressions il vient immédiatement que $A\omega^2 = F_0/m$.

2- Solution : x(t) = x_1(t) + x_2(t).

- x_1(t) solution générale de l'équation sans second membre (correspondant à l'absence d'excitation donc au régime libre). x_1(t) tend vers 0 quand t devient grand. On appelle régime transitoire la portion de l'évolution de x (t) pour laquelle x_1(t) n'est pas encore négligeable.
- x_2 (t) solution particulière de l'équation avec second membre. X (t) = x_2(t) pour t grand. On dit alors que le régime permanent est atteint. x_2(t) est une fonction sinusoïdale $x_2(t) = x.\cos(\omega t-\varphi)$. On démontre que :

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{\omega/\omega_0}{Q\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}.$$

3- Résonance d'élongation :

Pulsation de résonance : $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$ donc $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Amplitude à la résonance : $x_m = \dfrac{Q.A}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ avec $A = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$.

Si Q>>1, alors : $x_m = Q.A$ et $Q=\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$ avec ω tel que $x = \dfrac{x_m}{\sqrt{2}}$.

B) Manipulations

Les mesures seront faites à l'aide du logiciel Cassylab associé à un capteur de rotation. L'amortissement fluide de l'oscillateur est effectué grâce à un freinage électromagnétique, qu'on contrôle avec le courant qui circule dans les bobines.

I) Etude des oscillations amorties

1) Oscillations amorties par frottement solide:

Enregistrer les oscillations α(t) pour une intensité du frein électromagnétique I=0. Pour cela sélectionner *α_1 (rad)*, si nécessaire faire le zéro avec le bouton →0←.

Ecarter le pendule de sa position d'équilibre et lancer l'enregistrement pendant une dizaine de seconde. Le léger frottement solide est exercé par le capteur de rotation lui-même.

On va mesurer Δα/Δt pour une dizaine de périodes. Pour cela : aller dans l'onglet *Graphe→ Placer une marque→ Mesurer la différence* puis faire un clic gauche sur le maximum d'une oscillation puis un autre sur le maximum suivant, $\Delta\alpha_1$ et Δt s'affichent en bas à gauche de l'écran.

Vérifier que les différentes valeurs de Δα/Δt sont sensiblement identiques et en faire une moyenne.

2)Oscillations amorties par frottement fluide: (on se place dans des cas où les frottements solides sont négligeables devant les frottements fluides)

Pour chaque valeur de l'intensité I du frein électromagnétique variant de 0,1 à 0,5 A, enregistrer un graphe α (t) (penser à refaire le zéro entre chaque valeur de I) puis à partir du graphe:

- Mesurer la pseudo-période T. Conclure.
- Mesurer le décrément logarithmique δ.
- Déduire le facteur de qualité Q = π/δ.

Vérifier que Q est inversement proportionnel à I en traçant la courbe appropriée.

Visualiser un portrait de phase : Pour tracer le portrait de phase du pendule, on doit pour cela tracer $\dfrac{d\alpha_1}{dt} = f(\alpha_1)$.

Sélectionner dans le menu : *angle α_1(rad)* avec les paramètres : *temps* : 180s ; *intervalle* : 20ms ; *gamme* : 1,5rad.

La dérivée de α_1 sera obtenue dans le menu *calculatrice*. Enfin dans le menu *représentation standard* sur l'axe des *x* : *α_1* et sur l'axe des *y* : *f_1*. Ecarter le pendule et le lâcher sans vitesse initiale, déclencher le début de l'acquisition : le tracé du portrait de phase s'effectue automatiquement. (**joindre au compte rendu**).

II) Etude des oscillations forcées

Les oscillations forcées sont imposées par un moteur. On impose 2 valeurs du freinage successives (I = 0,5 A ; I = 0,3 A)

Décrire le protocole permettant de déterminer la fréquence de résonance f_r et la bande passante en fréquence Δf, pour chaque valeur du freinage.

En déduire le facteur de qualité $Q = \dfrac{f_r}{\Delta f}$ pour les deux cas. Commentez.