DM 5

FONCTIONNEMENT DE L'OREILLE HUMAINE

Depuis l'expérience de Wener et Bray (1930) qui permit de mettre en évidence les phénomènes électriques de l'oreille interne, la compréhension du fonctionnement physique de l'oreille suscite de nombreux travaux de recherche. Parmi ces travaux, les expériences de Shaw (1974) généralisées par Pickles (1988) montrent l'amplification sélective des sons selon la fréquence par les différents constituants de l'oreille. L'étude qui suit permet de rendre compte qualitativement des mesures expérimentales à l'aide de modélisations élémentaires.

L'oreille est composée typiquement de trois parties représentées sur la figure 3.

- L'oreille externe : le pavillon ouvert à l'air libre collecte les sons vers le conduit auditif qui mène au tympan ;
- L'oreille moyenne : c'est une cavité remplie d'air et qui contient trois osselets. Elle permet la transmission et l'amplification des signaux mécaniques de l'oreille externe vers l'oreille interne ;
- L'oreille interne : sa structure est complexe : elle transforme les signaux mécaniques en signaux électriques vers le nerf auditif.

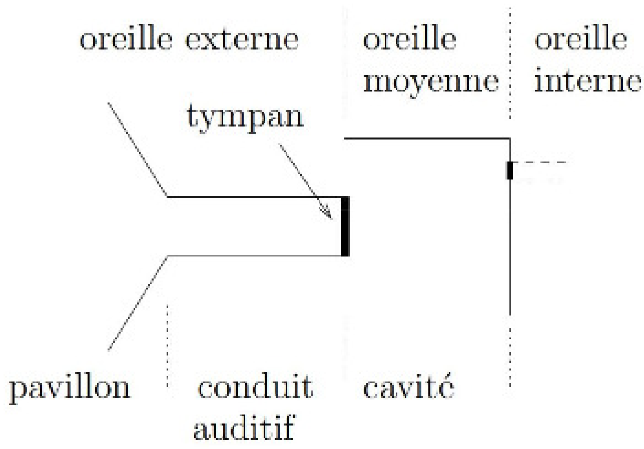


Figure 3 représentation schématique de l'oreille humaine

Dans la suite, nous développerons une modélisation très élémentaire de l'oreille externe et moyenne.

I) OREILLE EXTERNE :

Le tympan est modélisé par une membrane plane de masse m vibrant parallèlement à elle-même selon l'axe Ox. Ce modèle est schématisé sur la figure 4. Son déplacement par rapport à sa position d'équilibre est noté $x(t)$. Le tympan est soumis à une force de rappel $\overrightarrow{F_{rap}} = -kx(t)\overrightarrow{u_x}$, ainsi qu'à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F_{frott}} = -h\overrightarrow{v(t)}$, avec h constante et $\overrightarrow{v(t)} = \dfrac{dx(t)}{dt}\overrightarrow{u_x}$ la vitesse du tympan.

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x(t) dans le cas non amorti (h=0).
   En déduire la fréquence f_0 d'oscillation du tympan dans le cas non amorti.
2) Calculer f_0 et commentez sachant que l'oreille humaine est sensible aux sons de fréquences comprises entre 20 Hz et 20kHz.

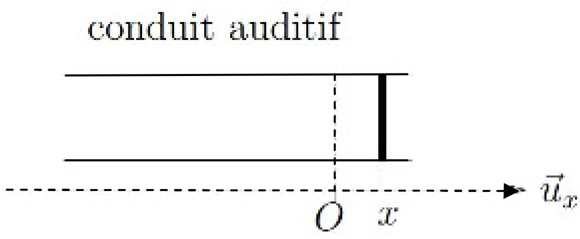


Figure 4 modélisation du tympan

3) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par x(t) en prenant en compte l'amortissement.
4) Résoudre cette équation en donnant la forme de la solution (on ne cherche pas ici à déterminer les constantes d'intégration) et en précisant le régime obtenu.
5) Calculer la pseudo-période T_0' et la pseudo-fréquence f_0' ainsi que la durée typique de décroissance $\tau' = \dfrac{2m}{h}$. Commentez ces résultats.
6) Tracer l'allure de la solution sachant que x(t=0s)=x_0 et que $\dfrac{dx(t=0s)}{dt} = 0$. (x_0 est une constante positive).

Données :

Masse du tympan m=15.10^{-6}kg.

Raideur de la force de rappel s'exerçant sur le tympan k=3500N.m^{-1}.

Coefficient de frottement fluide du tympan : h=0,10 N.s.m^{-1}.

II) ANALOGIE ELECTRIQUE

Un son se traduit physiquement par une modification de pression. Ainsi le tympan se trouve soumis en plus à une force de pression liée aux sons perçus : $\overrightarrow{F_{pression}} = F\overrightarrow{u_x}$.

1) On considère le circuit représenté sur la figure 5, comportant un résistor de résistance R_1, une bobine idéale d'inductance L_1 et un condensateur de capacité C_1 en série, le tout alimenté par une source de tension idéale de force électromotrice e.

a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)=C_1\,u(t)$.

b) Montrer qu'il existe une analogie entre la situation du tympan soumis à la force de pression et celle du circuit. Les équivalents des grandeurs électriques R_1, L_1, C_1 et e seront clairement donnés. Exprimer $f_{éle0}$, fréquence propre du circuit électrique en fonction de L_1 et C_1.

c) Au vue des valeurs numériques précédentes, ainsi qu'aux valeurs de R_1 et L_1, déduire celle de C_1 qui permet de réaliser l'analogie.

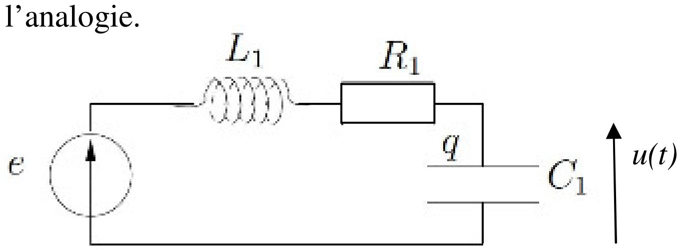


Figure 5 – circuit électrique équivalent

Données :

Résistance équivalente du tympan : $R_1=500\,\Omega$.

Inductance équivalente du tympan : $L_1=15$mH.

2) Il est admis que la présence du conduit auditif avant le tympan change ce circuit équivalent en un circuit donné sur la figure 6, avec une inductance L_2 et une capacité C_2 supplémentaires. Cette modélisation simple fournit des résultats qualitativement corrects.

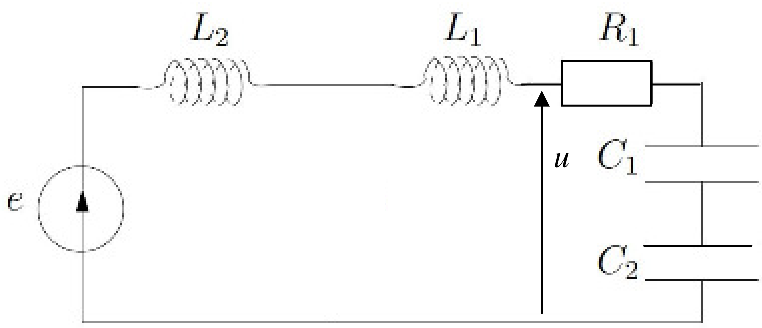
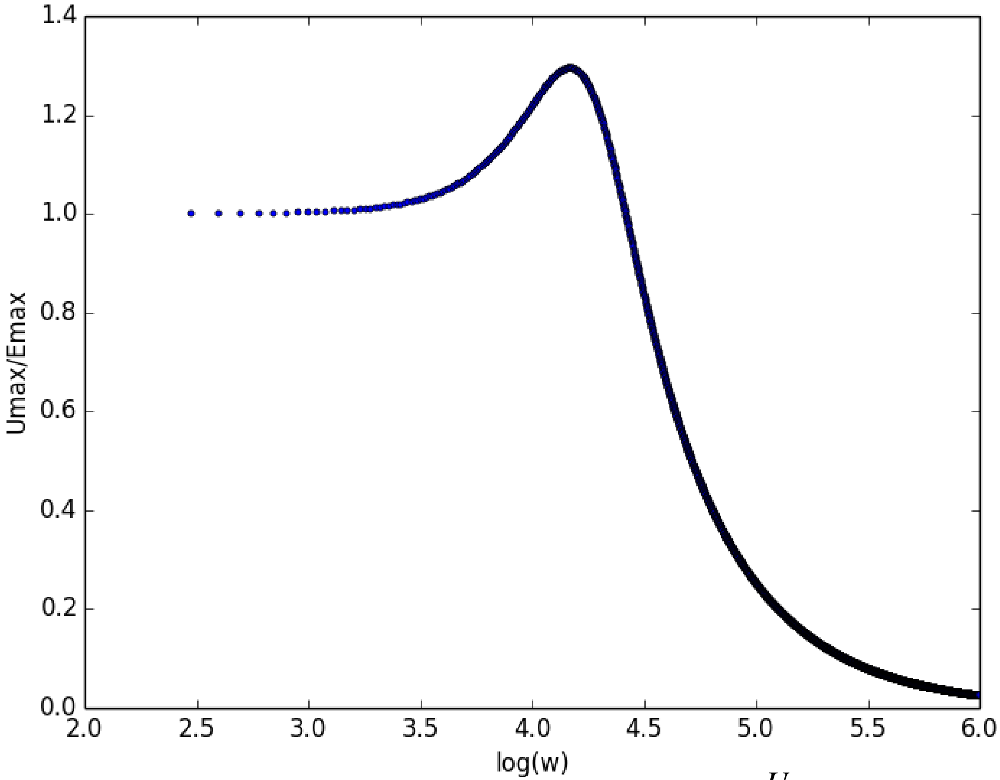


Figure 6 – modification du circuit électrique équivalent suite à la prise en compte du conduit auditif

Le régime étudié est sinusoïdal et forcé, de pulsation ω, on donne L_2=5mH et $C_1=C_2$.

A toute fonction du type $f(t) = F_{\max}\cos(\omega t+\varphi)$, on associe sa représentation complexe : $\underline{f(t)} = F_{\max}e^{(j\omega t+\varphi)}$.

a) Déterminer l'impédance équivalente à l'association en série de R_1 et des deux condensateurs.
b) Déterminer $\underline{u(t)}$ (correspondant à la tension u représentée ci-dessus, telle que $u=U_{max}\cos(\omega t+\varphi)$), en fonction de $\underline{e(t)}$ (correspondant à la tension e représentée ci-dessus, telle que $e=E_{max}\cos(\omega t)$), de L_1, R_1, C_1, C_2, L_2, j et ω
c) Trouver qualitativement (c'est-à-dire en raisonnant sur des schémas équivalents) les limites basses et hautes fréquences de u.
d) Déterminer l'expression de $\dfrac{U_{\max}}{E_{\max}}$ en fonction de la pulsation et des données du texte. Retrouver mathématiquement les limites basses et hautes fréquences de U_{max}.
e) Le graphe ci-après donne l'allure $\dfrac{U_{\max}}{E_{\max}}$ en fonction de $\log\omega$.



Quelles sont les limites aux hautes et basses fréquences du rapport $\frac{U_{\max}}{E_{\max}}$?

Quelle est la valeur maximale de ce rapport ?

A quelle fréquence f_{max} correspond ce maximum ?

Comparer à f_0.

ETUDE GRAPHIQUE D'UN FILTRE PASSE BANDE

On constitue un filtre passe bande à l'aide d'un circuit RLC parallèle, la tension de sortie étant prise aux bornes de l'association LC parallèle. Le diagramme de Bode en amplitude et en phase de ce filtre, est donné ci-après en annexe.

Le facteur de qualité d'un tel circuit est donné par $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$ où ω_0 est la pulsation propre du circuit LC.

I) Détermination des éléments du filtre :

1) Déterminer à l'aide du graphe, les valeurs numériques de la pulsation ω_0 et de la bande passante à -3dB $\Delta\omega$.
2) Mesurer sur le graphe en précisant la méthode utilisée, la valeur de l'atténuation aux basses et hautes fréquences de ce filtre (pentes en dB/décade).
3) Déduire de la question 1), la valeur numérique du facteur de qualité.
4) Sachant que la capacité du condensateur utilisé est $C = 0,2\mu F$, déterminer les valeurs numériques de l'inductance L et de la résistance R.

II) Réponse du filtre à un signal d'entrée carré

On envoie en entrée du filtre un signal carré de pulsation $\omega = 10^5$ rad.s^{-1}. Ce signal peut être décomposé en série de Fourier, sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux qui peut s'écrire : $u_e(t) = U_{em}\sin(\omega t) + 0,33U_{em}\sin(3\omega t) + 0,2U_{em}\sin(5\omega t) + ...$

On cherche à déterminer l'allure du signal de sortie $u_s(t)$. La valeur de l'amplitude du fondamental est $U_{em} = 1V$.

1) Déterminer, à l'aide du graphe, la valeur de l'amplitude U_{sm1} du signal de sortie correspondant au fondamental du signal d'entrée de pulsation ω et d'amplitude U_{em}.
2) Même question pour l'amplitude U_{sm2} du signal de sortie correspondant à l'harmonique de pulsation 3ω et d'amplitude $0,33U_{em}$. Conclure quant à la forme du signal du sortie.
3) Déterminer le déphasage φ_1 en radian du signal de sortie correspondant au fondamental du signal d'entrée, puis écrire le signal $u_{s1}(t)$.
4) On veut maintenant sélectionner l'harmonique de pulsation 5ω, quelle doit être la valeur C' de la capacité du condensateur si l'on conserve la même inductance ?
5) Si l'on veut sélectionner plus rigoureusement cette harmonique (c'est-à-dire obtenir un signal strictement sinusoïdal en sortie), doit-on augmenter ou diminuer la valeur de R (tout en gardant les mêmes valeurs de L et C)?

On donne **pour information** la fonction de transfert du filtre : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

NOM : **ANNEXE (à rendre avec la copie)**